数理解析研究所講究録
1507 巻 2006 年 54-63

竹崎の双対定理について

日本女子大学・理学部　中神　祥臣 (Yoshiomi Nakagami)
Mathematical and Physical Science,
Japan Womens University

竹崎の双対定理は作用素環の専門家には良く知られている結果である. ここでは非専門家を対象にその周辺を概観する.

1 局所コンパクト群の正則表現

局所コンパクト群 G 上の右不変な Haar 測度を μ とすれば, $\mu(tE)=\Delta(t)\mu(E)$ で定義されるモジュラー関数 Δ を用いて, Hilbert 空間 $L^2(G,\mu)$ 上の右正則表現と左正則表現がそれぞれ,

$$(\rho(t)\xi)(s)=\xi(st), \quad (\lambda(t)\xi)(s)=\Delta(t)^{-1/2}\xi(t^{-1}s)$$

により与えられる. このとき, G の右正則表現 ρ と $L^1(G,\mu)$ の表現 $f\in L^1(G)\mapsto\rho(f)\in\mathscr{R}(G)$ は

$$\rho(f)=\int_G f(t)\rho(t)dt$$

により結ばれている.

Hilbert 空間 $L^2(G\times G)=L^2(G)\otimes L^2(G)$ 上で

$$(W\xi)(t,s)=\xi(ts,s)$$

により定まるユニタリ作用素 W は $L^2(G\times G\times G)$ 上で五角関係式

$$W_{12}W_{13}W_{23}=W_{23}W_{12}$$

を満たしている. これは G の正則表現が乗法的なことを言い換えたものになっている. このとき, 任意の $\xi,\eta\in L^2(G)$ に対して,

$$(\omega_{\xi,\eta}\otimes\mathrm{id})(W)=(t\mapsto\omega_{\xi,\eta}(\rho(t)))$$
$$(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\eta})(W^*)=\int_G\overline{\xi}(t)\eta(t)\rho(t)d\mu(t)=\rho(\overline{\xi}\eta)$$

と表せるので, W の役割が次のように成っていることがわかる.

命題 1.1 集合 $\{(\varphi\otimes\mathrm{id})(W) \mid \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_*\}$ と $\{(\mathrm{id}\otimes\varphi)(W) \mid \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_*\}$ の閉包をそれぞれ A, $\widehat{A}$ とすれば, A は連続関数環 $C_\infty(G)$ であり, $\widehat{A}$ は被約 C^* 群環 $C_r^*(G)$ である.

このとき, W は von Neumann 環 $\mathscr{R}(G)\overline{\otimes}L^\infty(G)$ の元であるだけでなく, 乗法子環 $M(C_r^*(G)\otimes_{\min} C_\infty(G))$ の元でもある. ただし, $\mathscr{R}(G)$ は集合 $\{\rho(t) \mid t \in G\}$ の生成する von Neumann 環である.

命題 1.2 Σ を $L^2(G\times G)$ 上の互換作用素 $\xi\otimes\eta \mapsto \eta\otimes\xi$ とする. このとき, 作用素 $(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\eta})(\Sigma W)$ は Schmidt 類作用素である.

実際, 積分核 $K(t,s) = \overline{\xi(st^{-1})}\eta(t) \in L^2(G\times G)$ を用いて,

$$((\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\eta})(\Sigma W)\zeta)(t) = \int_G K(t,s)\zeta(s)d\mu(s)$$

と表せる.

2 局所コンパクト群の双対性

$L^1(G,\mu)$ は畳み込み積と対合

$$(f*g)(t) = \int_G f(ts^{-1})g(s)d\mu(s), \quad f^*(t) = \Delta(t^{-1})\overline{f(t^{-1})}$$

により * 多元環になる. von Neumann 環 $\mathscr{R}(G)$ の前双対空間 $\mathscr{R}(G)_*$ は次の畳み込み積と対合

$$(\varphi*\psi)(\rho(t)) = \varphi(\rho(t))\psi(\rho(t)) \quad \varphi^*(\rho(t)) = \overline{\varphi(\rho(t))}$$

により, * 多元環になる. このとき, この $\mathscr{R}(G)$ の表現

$$\varphi \in \mathscr{R}(G) \mapsto f \in C_b(G)$$

が

$$f(t) = \varphi(\rho(t))$$

により与えられる. この表現の像は Fourier 代数と呼ばれ, $A(G)$ で表される. 群 G が可換な場合には, $(\mathscr{R}(G), \mathscr{R}(G)_*)$ は $(L^\infty(\widehat{G}), L^1(\widehat{G}))$ と同一視することができるので, 最初の表現は Fourier 変換、後の表現は逆 Fourier 変換と解釈されている.

以上の考察から, 局所コンパクト群の双対性を * 多元環の場合に読み代えると $L^\infty(G)$ と $\mathscr{R}(G)$ の間の双対性と考えられ, この場合両者の間には $L^\infty(G)\cap\mathscr{R}(G) = \mathbb{C}1$ が成り立っている.

3 接合積の双対定理

局所コンパクト群 G の von Neumann 環 $\mathscr{M}$ へ作用 $\alpha = \{\alpha_t\}_{t\in G}$ が与えられると, これらから接合積という構成法により, 新たな von Neumann 環を作ることができる. von Neumann 環 $\mathscr{M}$ の作用する Hilbert 空間を $\mathscr{H}$ とする. ここで, $\mathscr{M}$ と G の $\mathscr{H} \otimes L^2(G)$ への表現を

$$(\pi(x)\xi)(t) = \alpha_t^{-1}(x)\xi(t), \quad (u(t)\xi)(s) = \xi(t^{-1}s)$$

とする. π は von Neumann 環の正規表現であり, u は局所コンパクト群の強連続ユニタリ表現である. このとき, これらの表現は共変性 $u(t)\pi(x)u(t) = \pi(\alpha_t(x))$ を満たしている.

定義 3.1 集合 $\{\pi(x) \mid x \in \mathscr{M}\}$ と集合 $\{u(t) \mid t \in G\}$ の両方が生成する von Neumann 環を $\mathscr{M}$ と G の接合積といい, $\mathscr{M} \rtimes_\alpha G$ で表す.

作用 α が恒等作用の場合, この接合積は通常の von Neumann 環のテンソル積 $\mathscr{M} \overline{\otimes} \mathscr{R}(G)$ と一致しているので, 接合積は群の半直積のように「ねじり」を入れたテンソル積と解釈することができる.

群 G が可換な場合には, この接合積 $\mathscr{M} \rtimes_\alpha G$ 上には双対作用と呼ばれる双対群 $\widehat{G}$ の自然な作用 $\{\widehat{\alpha}_\gamma\}_{\gamma\in\widehat{G}}$ を条件

$$\widehat{\alpha}_\gamma(\pi(x)) = \pi(x), \quad \widehat{\alpha}_\gamma(u(t)) = \langle t, \gamma\rangle u(t)$$

により定義することができる.

さらに $(\mathscr{H} \otimes L^2(G)) \otimes L^2(\widehat{G})$ 上で, 接合積 $\mathscr{M} \rtimes G$ の表現 $\widehat{\pi}$ と双対群 $\widehat{G}$ の表現 v を $\xi \in (\mathscr{H} \otimes L^2(G)) \otimes L^2(\widehat{G})$ に対して,

$$(\widehat{\pi}(y)\xi)(\gamma) = \widehat{\alpha}_\gamma^{-1}(y)\xi(\gamma), \quad (v(\gamma)\xi)(\gamma') = \xi(\gamma^{-1}\gamma')$$

で定義すると, 接合積の構成を繰り返すことができ, von Neumann 環

$$(\mathscr{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G}$$

が得られる. さらに, この上には

$$\widehat{\widehat{\alpha}}_t(\widehat{\pi}(y)) = \widehat{\pi}(y), \quad \widehat{\widehat{\alpha}}_t(v(\gamma)) = \langle t, \gamma\rangle v(\gamma)$$

で定義される G の自然な作用 $\widehat{\widehat{\alpha}} = \{\widehat{\widehat{\alpha}}_t\}_{t\in G}$ が存在する.

定理 3.2 (竹崎の双対定理) von Neumann 環 $\mathscr{M}$ への局所コンパクト可換群 G の作用 $\{\alpha_t\}_{t\in G}$ と接合積 $\mathscr{M} \rtimes_\alpha G$ への双対群 $\widehat{G}$ の作用双対作用 $\{\widehat{\alpha}_\gamma\}_{\gamma\in\widehat{G}}$ に対して,

$$\left\{(\mathscr{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G},\ \widehat{\widehat{\alpha}}\right\} \cong \left\{\mathscr{M} \overline{\otimes} \mathscr{L}(L^2(G)),\ \widetilde{\alpha}\right\}.$$

ただし, $\widetilde{\alpha}_t = \alpha_t \otimes \lambda_t$ かつ $\lambda_t(z) = \lambda(t) z \lambda(t)^*$.

$\mathscr{M}$ が因子環で有限でない場合には, $\mathscr{M}$ は $\mathscr{M}\otimes\mathscr{L}(\mathscr{H})$ と同型になるので, 接合積を2回繰り返すことにより, 元の von Neumann 環が復元され, 双対性が成り立つ. この双対定理はさらに, 局所コンパクト群の双対定理と同じ考え方を用いて, 非可換な局所コンパクト群の場合へ一般化することができる.

III 型 von Neumann 環 $\mathscr{M}$ において半有限で下に半連続な忠実荷重 φ のモジュラ自己同型 $\{\sigma_t^\varphi\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して, この双対定理を適用すると, III 型因子環と II_∞ 型 von Neumann 環が接合積により相互に関係していることがわかり, この定理は III 型因子環の構造解析において重要な役割を果たす構造定理が得られる.

定理 3.3 (竹崎の構造定理) $\mathscr{M}$ を III 型 von neumann 環とする.

(i) von Neumann 環 $\mathscr{M}\rtimes_{\sigma^\varphi}\mathbb{R}$ は II_∞ 型である.

(ii) 接合積 $(\mathscr{M}\rtimes_{\sigma^\varphi}\mathbb{R})\rtimes_{\widehat{\sigma^\varphi}}\mathbb{R}$ は $\mathscr{M}$ と同型である.

(iii) 接合積 $\mathscr{M}\rtimes\mathbb{R}$ 上の作用 $\widehat{\sigma^\varphi}_t$ を θ_t とすれば, $\tau(\theta_t(y))=e^{-t}\tau(y)$. ただし、$\tau$ は II_∞ 型 von Neumann 環 $\mathscr{M}\rtimes_{\sigma^\varphi}\mathbb{R}$ の上の半有限忠実正規トレイスである.

4 C^* 環の接合積の場合

局所コンパクト群 G の C^* 環 A 上への作用 $\alpha=\{\alpha_t\}_{t\in G}$ が与えられたとき, A に値を取り, コンパクトな台をもつ G 上の連続関数の全体のなすベクトル空間を $\mathscr{K}(G,A)$ とする. これは畳み込み積と対合

$$(f*g)(t)=\int_G f(s)\alpha_s(f(s^{-1}t))ds,\quad f^*(t)=\Delta(t^{-1})\alpha_t(f(t^{-1})^*)$$

により, 対合ノルム環になる. そこでその

C^* 環 A を実現する Hilbert 空間を $\mathscr{H}$ とし, 局所コンパクト群 G の左正則表現を Hilbert 空間 $L^2(G,\mathscr{H})$ にまで自然に拡張したものを u とする. つまり, $\xi\in L^2(G,\mathscr{H})$ に対し, $(u(t)\xi)(s)=\xi(t^{-1}s)$. C^* 環 A の Hilbert 空間 $L^2(G,\mathscr{H})$ 上での表現を

$$(\pi(a)\xi)(t)=\alpha_t^{-1}(a)\xi(t)\quad(\xi\in L^2(G,\mathscr{H}))$$

とする. これを用いて, 対合ノルム環 $\mathscr{K}(G,A)$ の元 f に対して,

$$\int_G \pi(f(t))u(t)d\mu(t)$$

と置けば, この積分は確定し, 対合ノルム環 $\mathscr{K}(G,A)$ の Hilbert 空間 $L^2(G,\mathscr{H})$ 上での表現が得られる.

定義 4.1 C^*環 A と局所コンパクト群 G に対して, 対合ノルム環 $\mathscr{K}(G,A)$ の包絡 C^* 環を A と G の **C^* 接合積**または単に接合積といい, $A \rtimes_\alpha G$ で表す. また, 上で得られた Hilbert 空間 $L^2(G,\mathscr{H})$ 上の表現の生成する C^* 環を**被約 C^* 接合積**または単に被約接合積といい, $(A \rtimes_\alpha G)_r$ で表す.

竹崎の双対定理を C^* 環の場合に最初に証明したのは, 当時竹崎氏の元にいた高井博司氏である.

定理 4.2 (高井) 局所コンパクト群 G が可換な場合, 被約 C^* 接合積 $((A \rtimes_\alpha G)_r \rtimes_{\hat{\alpha}} \widehat{G})_r$ は C^* 環のテンソル積 $A \otimes \mathscr{K}(\mathscr{H})$ と同型である. ただし, $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ は Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上のコンパクト作用素環である.

2つの C^* 環 A, B が与えられたとき, $A \otimes \mathscr{K}(\mathscr{H})$ と $B \otimes \mathscr{K}(\mathscr{H})$ が同型になるとき, A と B は安定同型であるという. これは強森田同値より強い概念であるが, C^* 環 A, B が σ 単位的な場合には同値であることがわかっており, 非可換幾何等においても基本的である. とくに, C^* 環の K 群はこのような安定同型に関する不変量であるから, C^* 環の双対定理は K 理論における基本的な道具として, 大いに活用された. さらに非可換群への一般化が今井-高井により示されている.

5 コンパクト量子群

群作用の場合の竹崎の双対定理は部分的に量子群の場合にまで一般化できている. その準備として, 簡単なコンパクトな場合の説明をしよう.

定義 5.1 ([7]) 単位的 C^* 環 A に余結合法則を満たす余積 $\delta : A \to A \otimes_{\min} A$ が与えられ, $\delta(A)(\mathbb{C}1 \otimes A)$ と $(A \otimes \mathbb{C}1)\delta(A)$ のいずれもが $A \otimes_{\min} A$ において線形稠密 (cancellation property) のとき, (A, δ) をコンパクト量子群という.

コンパクト量子群には両側不変性

$$(\mathrm{id} \otimes h)(\delta(a)) = h(a)1 = (h \otimes \mathrm{id})(\delta(a)) \quad (a \in A)$$

を満たす, Haar 状態を呼ばれる状態 h が一意的に存在する. この状態に関する GNS 構成法 $\{\pi_h, \mathscr{H}_h, \xi_h\}$ を用いると, $\mathscr{H}_h \otimes \mathscr{H}_h$ 上で

$$W(a\xi_h \otimes b\xi_h) = (\pi_h \otimes \pi_h)(\delta(a))(\xi_h \otimes b\xi_h)$$

により定義されるユニタリ W は $\mathscr{H}_h \otimes \mathscr{H}_h \otimes \mathscr{H}_h$ 上で五角関係式を満たし,

$$(\pi_h \otimes \pi_h)(\delta(a)) = W(\pi_h(a) \otimes 1)W^*$$

と表せる.

局所コンパクト量子群 (荷重付き Hopf C^* 環) はこのようにスマートに定義することはできておらず, 残念ながら Haar 測度に相当する Haar 荷重の存在を仮定し, その性質を用いて, 以下で説明する manageable な乗法的ユニタリの存在を示し, 次節で説明するいろいろな性質を導くことになる.

量子群 (A, δ) または $(\mathscr{M}, \delta)$ に対しては, 局所コンパクト群の場合と同じように, 双対量子群 $(\widehat{A}, \widehat{\delta})$ または $(\widehat{\mathscr{M}}, \widehat{\delta})$ を構成することができ, これを繰り返すことにより, 双対定理を示すことができる. また量子群に対しては, 可換子環に相当する量子群や反同型なものに対応する量子群も存在する.

詳細は文献 [1],[2],[3] を参照.

局所コンパクト量子群は, その双対量子群上に有界な余単位元が存在するとき, 強柔順であるという. このことから局所コンパクト量子群の柔順性つまり有界な不変平均の存在を導くことができる. とくに, 群の場合には, 柔順性と同値になる.

6 乗法的ユニタリ

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ に対して, $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ 上のユニタリ W が $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ 上で五角関係式を満たすとき, W を $\mathscr{H}$ における乗法的ユニタリという. 局所コンパクト群の場合からもわかるように、五角関係式は群の積構造に相当している. 群の逆元の存在に相当する概念を捉え直すための準備として次のような概念を導入する.

$\mathscr{H}$ から新たな Hilbert 空間 $\mathscr{H}^c$ への共役線形な全単射 $\xi \mapsto \xi^c$ で $(\xi|\eta) = (\eta^c|\xi^c)$ を満たすものが存在するとき, $\mathscr{H}^c$ を $\mathscr{H}$ に共役な Hilbert 空間という.

定義 6.1 ([6]) $\mathscr{H}$ における乗法的ユニタリ W に対して, $\mathscr{H}$ において稠密な定義域をもつ可逆な正自己随伴作用素 Q と $\mathscr{H}^c \otimes \mathscr{H}$ 上のユニタリ $\widetilde{W}$ が存在し, 任意の $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{H}, \eta_1 \in \mathscr{D}(Q), \eta_2 \in \mathscr{D}(Q^{-1})$ に対して,

$$(\xi_1 \otimes \eta_1 | W(\xi_2 \otimes \eta_2)) = (\xi_2^c \otimes Q\eta_1 | \widetilde{W}(\xi_1^c \otimes Q^{-1}\eta_2)).$$

が成り立つとき, W は manageable であるという.

この定義に使われている作用素 Q は群構造を変形する作用素であり, 局所コンパクト群や Kac 環の場合には自明になる. しかし自明であっても, 必ずしも群構造だけでは捉えきれないものを包含している. このような状況において, 次の概念は技術的な問題を解決するために導入され重要な役割を果たしているので, 参考のために紹介だけをしておく.

定義 6.2 ([6]) Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の作用素 h が

$$h\mathscr{H} \subset \mathscr{D}(Q^{-1}), \quad Q^{-1}h \in (\sigma c)$$

を満たすとき, h を $(Q\sigma c)$ の作用素であるといい, $\mathrm{Tr}(hQ^{-2}h)^{1/2}$ を $\|h\|_{HS}$ で表す.

命題 6.3 $\|h\|_{HS} < \infty$ であるための必要十分条件は

$$\forall\, \xi \in \mathscr{D}(Q)\ \forall\, \eta \in \mathscr{H} : (\xi|h\eta) = (\eta^c \otimes Q\xi|\zeta)$$

を満たす $\zeta \in \mathscr{H}^c \otimes \mathscr{H}$ が存在することである.

実際, $Q^{-1}h \in (\sigma c)$ であることと,

$$(\xi'|Q^{-1}h\eta) = (\eta^c \otimes \xi'|\zeta) \quad (\xi' \in \mathscr{D}(Q^{-1}), \eta \in \mathscr{H})$$

を満たす $\zeta \in \mathscr{H}^c \otimes \mathscr{H}$ が存在することと同値である. ここで $\xi = Q^{-1}\xi'$ とすれば, 求める式が得られる.

一般に五角関係式を満たす可分 Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の乗法的ユニタリ W が manageable な場合には, いろいろなことが導ける. 用語の準備をする.

定義 6.4 C^* 環 A, B に対して, A から乗法子環 $M(B)$ への準同型写像 π で $\pi(A)B$ が B において稠密なもの全体を $\mathrm{Mor}(A, B)$ で表す.

このとき, $\pi \in \mathrm{Mor}(A, B)$ かつ $\pi' \in \mathrm{Mor}(B, C)$ ならば, $\pi' \circ \pi \in \mathrm{Mor}(A, C)$ が成り立つ.

定理 6.5 ([6])

(i) 集合 $\{(\varphi \otimes \mathrm{id})(W) \mid \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_*\}$ と $\{(\mathrm{id} \otimes \varphi)(W) \mid \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_*\}$ の閉包をそれぞれ A, $\widehat{A}$ とすれば, これらはともに C^* 環になり, W は $\widehat{A} \otimes_{\min} A$ の乗法子環の元である.

(ii) 余結合法則を満たす余積 $\delta \in \mathrm{Mor}(A, A \otimes_{\min} A)$ が存在し, $(\mathrm{id} \otimes \delta)(W) = W_{12}W_{13}$.

(iii) 集合 $\delta(A)(\mathbb{C}1 \otimes A)$ と $(A \otimes \mathbb{C}1)\delta(A)$ はともに $A \otimes_{\min} A$ に含まれ (proper), しかもそれぞれそこで稠密である.

(iv) A を Banach 空間とみたとき, 集合 $\{(\varphi \otimes \mathrm{id})(W) \mid \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_*\}$ を芯にもつ閉線形作用素 κ が存在し, $\kappa((\varphi \otimes \mathrm{id})(W)) = (\varphi \otimes \mathrm{id})(W^*)$ となる. このとき, 定義域 $\mathscr{D}(\kappa)$ は A の部分多元環であり,

$$\kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a), \quad \kappa(\mathscr{D}(\kappa)) = \{a^* \mid a \in \mathscr{D}(\kappa)\}, \quad \kappa(\kappa(a)^*)^* = a$$

を満たしている.

(v) A 上には強連続な 1 径数自己同型群 $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在し, その無限小生成元 $\tau_{i/2}$ を用いると, $\kappa = R \circ \tau_{i/2}$ を満たす正規対合的自己同型 R で $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ と可換なものが存在する.

(vi) 自己同型群 $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を導く正自己随伴作用素 Q で $\tau_t(a) = Q^{2it}aQ^{-2it}$ となるものが存在し, $\widetilde{W}^* = W^{t\otimes R}$ と表せる.

C^* 環の元 $a \in A$, $b \in \widehat{A}$ に対して

$$\delta(a) = W(a \otimes 1)W^*, \quad \widehat{\delta}(b) = W^*(1 \otimes b)W$$

とすれば, δ, $\widehat{\delta}$ はそれぞれ A, $\widehat{A}$ 上で余結合法則を満たす余積になる.
上の定理に現れる κ は余逆元である.

7 W に適合したユニタリ

manageable な乗法的ユニタリだけではまだ群構造は現れないが, これに何らかの条件を付け加えて群構造が現れたとき, そのユニタリ表現に相当するものを次の定義で与える.

定義 7.1 ([6]) 乗法的ユニタリ W に対して $\mathscr{H}_V \otimes \mathscr{H}$ 上のユニタリ V が $\mathscr{H}_V \otimes \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ 上で

$$V_{12}V_{13}W_{23} = W_{23}V_{12}$$

を満たすとき, V を W に適合したユニタリという.

定理 7.2 ([6]) V を manageable な乗法的ユニタリ W に適合したユニタリであるとする.

(i) 集合 $\{(\mathrm{id} \otimes \varphi)(V^*) \mid \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})_*\}$ の閉包 B は可分 C^* 環になり, V は manageable かつ $B \otimes A$ の乗法子環の元である.

(ii) 余積 $\delta_A \in \mathrm{Mor}(A, A \otimes_{\min} A)$ に対して $(\mathrm{id} \otimes \delta_A)(V) = V_{12}V_{13}$.

(iii) κ の乗法子環 $M(A)$ における緊密位相に関する閉包を $\widetilde{\kappa}$ とすれば, 任意の $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_V)_*$ に対して $(\varphi \otimes \mathrm{id})(V) \in \mathscr{D}(\widetilde{\kappa})$ かつ

$$\widetilde{\kappa}((\varphi \otimes \mathrm{id})(V)) = (\varphi \otimes \mathrm{id})(V^*)$$

(iv) $\widetilde{V}^* = V^{t\otimes R}$ と表せる.

8 量子群による接合積

局所コンパクト量子群の C^* 環あるいは von Neumann 環を用いた記述をそれぞれ (A, δ_A), $(\mathscr{M}, \delta_{\mathscr{M}})$ とする. 一般に, 局所コンパクト群の作用素環への作用が具体的に与えれれている例はそれほど多くはない. まして量子群となると, 非コンパクトなものの具体例も少ないが, その作用となるとさらに少ない. そのことを念頭に, ここでは作用の一般的な定義を与えておく.

定義 8.1 (i) 局所コンパクト量子群 (A,δ_A) から C^* 環 $B\otimes_{\min}A$ への準同型写像 $\delta\in\mathrm{Mor}(A,B\otimes_{\min}A)$ が

$$(\delta\otimes\mathrm{id})\circ\delta=(\mathrm{id}\otimes\delta_A)\circ\delta$$

を満たすとき, δ を量子群の B への (右) 余作用という.

(ii) 局所コンパクト量子群 $(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$ から von Neumann 環 $\mathscr{N}\bar{\otimes}\mathscr{M}$ への同型写像 $\delta:\mathscr{N}\to\mathscr{N}\bar{\otimes}\mathscr{M}$ が

$$(\delta\otimes\mathrm{id})\circ\delta=(\mathrm{id}\otimes\delta_{\mathscr{M}})\circ\delta$$

を満たすとき, δ を量子群の $\mathscr{M}$ への (右) 余作用という.

問題 8.2 集合 $\delta(B)(\mathbb{C}1\otimes A)$ は $B\otimes_{\min}A$ に含まれ (proper), しかもそこで線形稠密か (cancellation) ?

以下, von Neumann 環の場合だけを述べるが, C^* 環の場合にも同じようなことがいえる.

定義 8.3 von Neumann 環 $\mathscr{N}$ に局所コンパクト量子群 $(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$ の右余作用が与えられているものとする. $\delta(\mathscr{N})$ と $\mathbb{C}1\otimes\widehat{\mathscr{M}}'$ の生成する von Neumann 環を $\mathscr{N}$ と $(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$ の接合積といい, $\mathscr{N}\rtimes(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$ で表す.

接合積 $\mathscr{N}\rtimes(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$ の元 z に対して, 量子群 $(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$, その双対量子群 $(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$ の議論に現れるモジュラー対合作用素 $J,\hat{J}$ を用いて,

$$\hat{\delta}(z)=\mathrm{Ad}_{1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})W^*(J\hat{J}\otimes J\hat{J})}(z\otimes 1)$$

とすれば, $\hat{\delta}$ は双対量子群 $(\widehat{\mathscr{M}},\delta_{\widehat{\mathscr{M}}})$ をモジュラー対合作用素を用いて可換子環に書き換え得られる量子群 $(\widehat{\mathscr{M}}',\delta_{\widehat{\mathscr{M}}'})$ の接合積上への右余作用 $\mathscr{N}\rtimes(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})\to(\mathscr{N}\rtimes(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}}))\bar{\otimes}\widehat{\mathscr{M}}'$ になる. 実際,

$$\hat{\delta}(\delta(x))=\delta(x)\otimes 1,\quad \hat{\delta}(1\otimes y)=(\mathrm{id}\otimes\delta_{\widehat{\mathscr{M}}'})(1\otimes y)\quad (y\in\widehat{\mathscr{M}}')$$

このとき, $(\mathscr{N}\rtimes(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}}))\rtimes(\widehat{\mathscr{M}}',\delta_{\widehat{\mathscr{M}}'})$ が $\delta(\mathscr{N})$ と $\mathbb{C}1\otimes\mathscr{L}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}})$ の生成する von Neumann 環と同型になることはわかるが、これが $\mathscr{N}\bar{\otimes}\mathscr{L}(L^2(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}))$ と同型に成るかどうかは自明ではない. 上の問題はこの部分に使われる.

定理 8.4 量子群 $(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}})$ の双対量子群が強柔順な場合には, 竹崎の双対定理が成り立つ. つまり, 接合積の接合積 $(\mathscr{N}\rtimes(\mathscr{M},\delta_{\mathscr{M}}))\rtimes(\widehat{\mathscr{M}}',\delta_{\widehat{\mathscr{M}}'})$ は $\mathscr{N}\bar{\otimes}\mathscr{L}(L^2(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}))$ と同型である.

元々の竹崎の双対定理と同じように, この上でさらに双対余作用を考えることもでき, その場合には反同型な量子群も必要になる.

定理の証明で, 強柔順性の仮定は余単位元の存在に使われるだけであるから, 取り除くこともできそうである.

参考文献

[1] Kustermans, J. and S. Vaes : Locally compact quantum groups, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **33**(2000), 837-934.

[2] Masuda, T. and Y. Nakagami, A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **30**(1994), 799-850.

[3] Masuda, T., Y. Nakagami and S. L. Woronowicz : A C^*-algebraic framework for quantum groups, *International Journal Math.*, **14**(2003), 903-1001.

[4] Nakagami, Y. : Takesaki duality for the crossed product by quantum groups, *Quantum and Non-cummutative Analysis* (1993), 263-281.

[5] Nakagami, Y. : Amenability for weighted Hopf C^*-algebras, *A Garden of Quanta*, (2003), 463-477.

[6] Woronowicz, S. L. : From multiplicative unitaries to quantum groups, *International Journal Math.*, **7**(1996), 127-149.

[7] Woronowicz, S. L. : Compact quantum groups, *Quantum Symmetries*, (1998), 845-884.